

# Journées ANR MicroWave

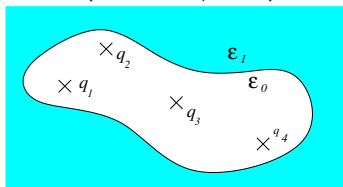
Bruno Pinçon

Institut Elie Cartan et ESIAL  
Université Henri Poincaré

7 décembre 2009

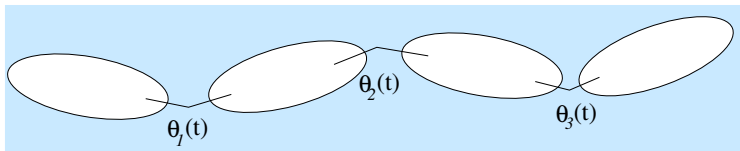
- 1 Je me présente...
- 2 Courte introduction sur le retournement temporel

- calcul du potentiel electrostatique d'interaction molécule solvant (protéine / eau)



équation intégrale  
collocation (éléments courbes)  
remailage surfacique  
développements en f90

- interaction fluide-structure (avec Alexandre Munnier)  
*modélisation avec lagrangien, ode, fft, équation  
intégrale (Nyström), toolbox Matlab*



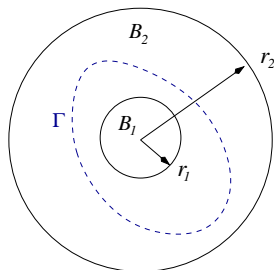
- retournement temporel (avec Karim puis Xavier et Bertrand) (cf deuxième partie).

## Activités logicielles

- Jusqu'en 2005 participation au logiciel **scilab** (nombreux ajouts et améliorations, membre du consortium scilab) ;
- depuis 2005 élaboration d'un nouveau "Matlab-like" **nsp-tumbi** (avec Jean-Philippe Chancelier, ENPC).
- bonnes connaissances de C, matlab, scilab, octave, fortran (77 et 90), OpenGL ;
- veille "technologique" sur les codes/bibliothèques numériques ;
- depuis peu : initiation à **gms** et **getdp**.

# Retournement temporel #1

Principe basé sur la **reversibilité** de l'équation des ondes en milieu **non dissipatif**. En enregistrant la **trace** de la solution sur une frontière on peut rétro-propager un signal vers les sources qui l'ont émis.



$$\begin{aligned} & @_{tt}u - c^2 \Delta u = 0; \mathbb{R}^3 \times ]0; T[ \\ & u(x; 0) = u_0(x); \text{Supp}(u_0) \subset B_1 \\ & @_t u(x; 0) = u_1(x); \text{Supp}(u_1) \subset B_1 \end{aligned}$$

On "enregistre"  $u(x; t)$  sur  $\Gamma$   
pendant un temps  $T$  ( $cT > r_1 + r_2$ ).

$$\begin{aligned} & @_{tt}v - c^2 \Delta v = 0; \Omega \times ]T; 2T[ \\ & v(x; T) = 0; @_t v(x; T) = 0; \\ & v(x; t) = u(x; 2T - t); \text{sur } \Gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow v(x; t) &= u(x; 2T - t) \\ \text{et donc } v(x; 2T) &= u(x; 0): \end{aligned}$$

## Retournement temporel #2

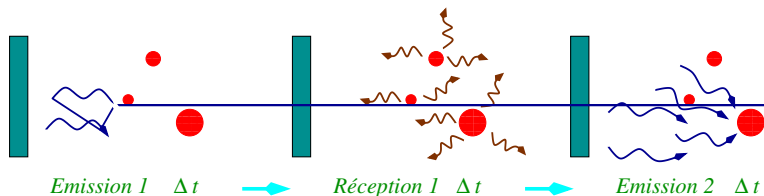
Enregistrer et ré-émettre à l'envers est possible depuis la mise au point (début 90) de miroirs à retournement temporel par l'équipe de M. Fink (LOA à l'ESPCI).

Si on itère les cycles d'émission-réception :

## Retournement temporel #2

Enregistrer et ré-émettre à l'envers est possible depuis la mise au point (début 90) de miroirs à retournement temporel par l'équipe de M. Fink (LOA à l'ESPCI).

Si on itère les cycles d'émission-réception :



on **focalise l'onde** sur l'obstacle le plus réfléchissant. Nombreuses applications (destruction de calculs rénaux, traitement de tumeurs du cerveau par hyperthermie, contrôle non-destructif,...).

Avec 2 cycles d'émission-réception, on définit un **opérateur de retournement temporel**. Expérimentalement on observe que :

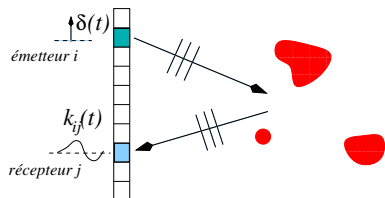
Avec 2 cycles d'émission-réception, on définit un **opérateur de retournement temporel**. Expérimentalement on observe que :

- le nombre de valeurs propres significativement non nulles correspond au nombre d'obstacles dans le milieu ;
- $diam(\mathcal{O}_i) > diam(\mathcal{O}_j)$  correspond à  $i > j$  ;
- l'utilisation du vecteur propre associé à  $i$  permet de focaliser une onde sur  $\mathcal{O}_i$

*Le retournement temporel permet de résoudre une sorte de **problème inverse**.*



## Modélisation d'un MRT à N transducteurs :



$$\begin{aligned}r_j(t) &= k_{ij}(t) * e_i(t), \quad 1 \leq i, j \leq N \\R_j(\omega) &= K_{ij}(\omega) E_i(\omega), \quad 1 \leq i, j \leq N \\R(\omega) &= K(\omega) E(\omega) \\K(\omega) &\text{ matrice symétrique } N \times N\end{aligned}$$

En régime **harmonique**,  $u(x; t) = \mathcal{R}e(u(x)e^{-i\omega t})$ , “retourner le temps” correspond à une **conjugaison** :

$$v(x; t) = u(x; -t) = \mathcal{R}e(u(x)e^{i\omega t}) = \mathcal{R}e(\overline{u(x)}e^{-i\omega t})$$

⇒ l'opérateur de RT est :  $\overline{K(!)}K(!)$ .


Pour pouvoir démontrer/étudier mathématiquement la méthode D.O.R.T., Christophe Hazard et Karim :

- supposent le miroir fermé “idéal” (à l’infini) et “continu”.
- travaillent en régime harmonique.

Cela permet d'utiliser le formalisme “**champ lointain**”, “**ondes d’Herglotz**”, “**opérateur de champ lointain**”,... (cf Colton-Kress).

 C. Hazard, K. Ramdani, SIAM J. Appl. Math., 2004. **Acoustic TR in 3d**

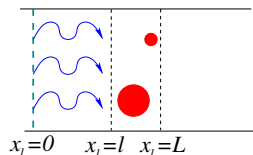
 B. Pinçon, K. Ramdani, Inverse Problems, 2007. **Acoustic TR in 2d waveguides**

 X. Antoine, B. Pinçon, K. Ramdani, B. Thierry, SIAM J. Appl. Math., 2008. **Electromagnetic TR in 3d, far field, continuous TRM**

## EMISSION

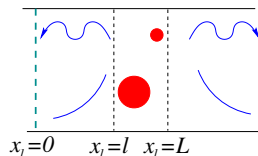
$$X_I = (X_1^I, \dots, X_N^I)$$

$$u_I(x) = \sum_{n=1}^N X_n^I e^{i\beta_n x_1} s_n(x_2)$$



## DIFFRACTION

$$\begin{cases} \Delta u_D + k^2 u_D = 0 \text{ dans } \Omega_\infty \setminus \bar{\mathcal{O}}, \\ u_D = -u_I \text{ sur } \partial\mathcal{O}, \quad u_D = 0 \text{ sur } \partial\Omega_\infty, \\ u_D \text{ sortant} \end{cases}$$

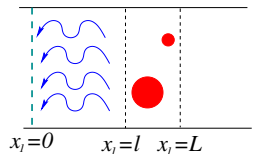


## RECEPTION

$$\text{Pour } x_1 \leq l : u_D(x) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n^D \Phi_n^-(x)$$

$$X_D = (X_1^D, \dots, X_N^D)$$

$$X_n^D = (u_D|_{x_1=0}, s_n) = \int_0^d u_D(0, x_2) s_n(x_2) dx_2$$



# Nos opérateurs (matrices) de scattering et de RT

La matrice de scattering (ou matrice de transfert)  $S \in \mathcal{M}_{N,N}(\mathbb{C})$  est définie par :

$$X_D = SX_I$$

Un cycle du processus :

$$\begin{array}{ccccc} & \text{Emission} & & \text{Retournement} & \\ & \text{Diffraction} & & \text{temporel} & \\ & \text{Réception} & & \text{(Conjugaison)} & \\ X_I & \longmapsto & X_D = SX_I & \longmapsto & Y_I = \overline{X}_D = \overline{S} \overline{X}_I \end{array}$$

La matrice de retournement temporel correspond à 2 cycles :

$$Z_I = \overline{S} \overline{Y}_I = \overline{S} (\overline{\overline{S} \overline{X}_I}) = \overline{S} S X_I \text{ soit } T = \overline{S} S$$

- 1 En utilisant une base adéquate on montre que l'opérateur de RT est positif et auto-adjoint. Les valeurs propres de  $T$  sont donc réelles et positives.
- 2 Pour un nombre de mode fixé  $N = \lfloor kd \rfloor$ , on fait une analyse asymptotique sur la taille des obstacles  $(\epsilon)$  pour  $\epsilon \rightarrow 0$ . On obtient que :

$$T^\epsilon = T^0 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\ln \epsilon}\right)$$

- 3 En étudiant le spectre du problème limite ( $T^0$ ) lorsque  $N \rightarrow +\infty$  on retrouve les résultats de focalisation sélective.

D'après les expériences et le résultat théorique de focalisation, il faut que :

- $\text{diam}(\text{Obs}) \ll \frac{2}{k} \ll d$ ,
- les obstacles doivent être suffisamment éloignés les uns des autres.

Il faut aussi au moins 10 “mailles” par longueur d’onde pour Helmholtz.

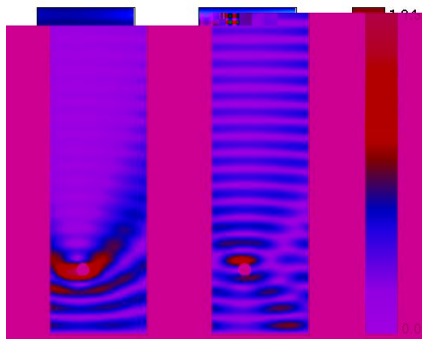
## tests :

- 1 obstacle : on fait varier sa taille  $d_1 > d_2 > d_3 > \dots$   
Question :  $\lambda_2/\lambda_1 \rightarrow 0$  ?
- 2 différents essais avec 3 obstacles (augmentation du nombre de mode  $N = \lfloor kd/\pi \rfloor$ )

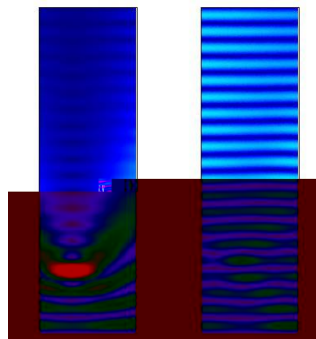
# Test #1 (1 obstacle, 20 modes), $\lambda_2/\lambda_1 \rightarrow 0$ ?

$h = 0.025$ , longueur d'onde :  $\lambda = 1$ , guide :  $d = 10.2$

$diam(Obs)$	0.408	0.204	0.102	0.051	0.0255
$\lambda_2/\lambda_1$	0.47	0.088	0.012	0.0013	0.00034



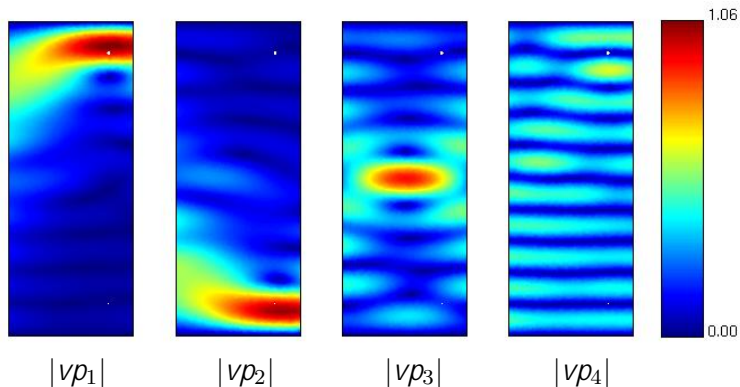
$diam(Obs) = 0.408$



$diam(Obs) = 0.0255$

## Test #2 (3 obstacles, 10 modes)

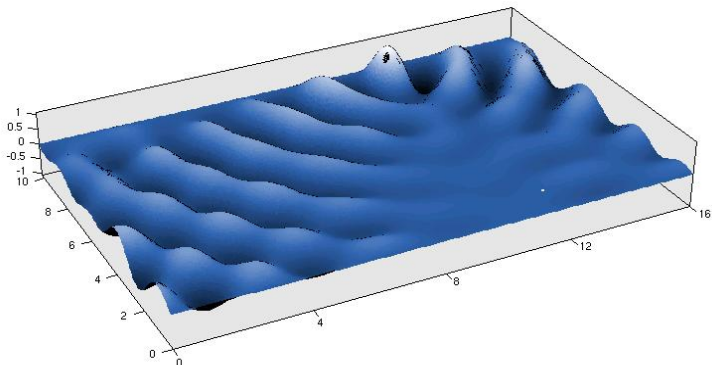
$h = 0.03$ , max diam(obs) : 0.102, longueur d'onde :  $\lambda = 2$ , guide :  $d = 10.2$   
valeurs propres de  $T = [0.331, 0.203, 0.136, 0.0013, \dots]$





## Test #2 Animation onde incidente vp1

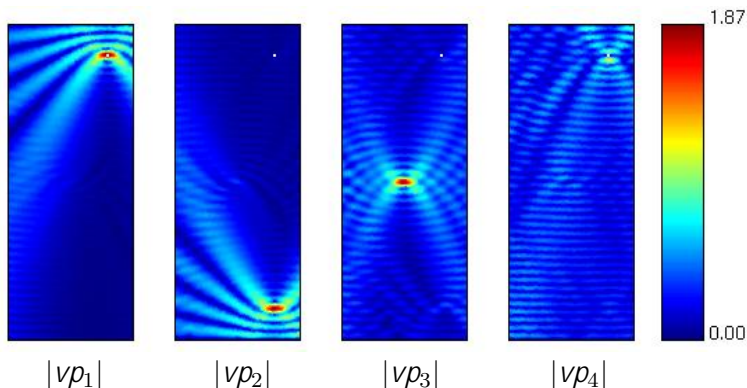
$$u(x, t) = \operatorname{Re} \left( e^{-i\omega t} u_{I_1}(x) \right) = \operatorname{Re} \left( e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^N X_n^{I_1} e^{i\beta_n x_1} s_n(x_2) \right)$$



*remerciement à Jean-François pour les trucs mencoder !*

# Test #3 (3 obstacles, 40 modes, $\simeq 370000$ triangles!)

$h = 0.02$ , max diam(obs) : 0.102, longueur d'onde :  $\lambda = 0.5$ , guide :  $d = 10.2$   
valeurs propres de  $T = [0.78, 0.51, 0.27, \mathbf{0.05}, \dots]$



# Test #3 bis (3 obstacles, 40 modes, $\simeq 370000$ triangles!)

$h = 0.02$ , max diam(obs) : 0.051, longueur d'onde :  $\lambda = 0.5$ , guide :  $d = 10.2$   
valeurs propres de  $T = [0.507, 0.389, 0.267, 0.0007, \dots]$

