

Equations intégrales bien conditionnées et Préconditionneurs

Marion DARBAS (LAMFA)

ANR MicroWave, IECN, 7-8-9 Décembre 2009

Depuis 2006, MCF au LAMFA à l'université de Picardie Jules Verne à Amiens

- 2004-06 ATER INSA Toulouse, puis Paris Dauphine
- 2001-04 Allocataire monitrice à l'INSA de Toulouse. Thèse de doctorat soutenue en Novembre 2004
 - Titre « **Préconditionneurs Analytiques de type Calderón pour les Formulations Intégrales des Problèmes de Diffraction d'Ondes** »
 - sous la direction d'Abderrahmane BENDALI et de Xavier ANTOINE
- 1996-2001 Cours universitaire à l'Université Paul Sabatier de Toulouse

Thèmes de recherche : Méthode des équations intégrales, Préconditionneurs, Problèmes inverses (détection numérique)

1. Introduction
2. Méthode des équations intégrales et enjeux numériques
3. Equations intégrales combinées généralisées
4. Préconditionneurs analytiques

Introduction

1 – Introduction

1.1 – Equations de l'acoustique

- Equation des ondes tridimensionnelle

$$\frac{\partial_t^2 p(t, \mathbf{x})}{\partial t^2} - c^2 \Delta p(t, \mathbf{x}) = 0, \quad (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3,$$

avec p la pression, c la vitesse de propagation.

- Catégorie particulière de solutions : $p(t, \mathbf{x}) = \mathcal{R}(u(\mathbf{x})e^{-i\omega t})$ (ω pulsation).

Equation de Helmholtz 3D

$$\Delta u + k^2 u = 0,$$

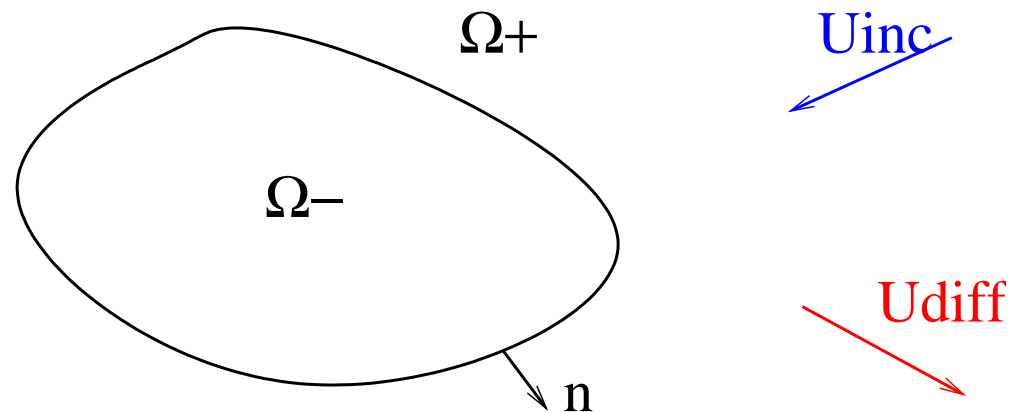
avec $k = \omega/c$ le nombre d'onde.

- Paramètre important : la longueur d'onde $\lambda = 2\pi/k$.**

1.2 – Problème extérieur d'Helmholtz

La diffraction est le comportement des ondes lorsqu'elles rencontrent un obstacle

- ➡ Ω^- obstacle dans \mathbb{R}^3 de frontière régulière $\Gamma = \partial\Omega^-$
- ➡ $\Omega^+ = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega^-}$ domaine extérieur de propagation de l'onde
- ➡ \mathbf{n} normale unitaire sortante à Ω^-
- ➡ u^{inc} onde incidente sur Ω^- définie par le nombre d'onde k .



L'onde diffractée u^+ est solution du problème aux limites

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Equation d'Helmholtz} \\ \Delta u^+ + k^2 u^+ = 0, \text{ dans } \Omega^+, \\ \text{Condition aux limites (Dirichlet ou Neumann)} \\ u^+|_{\Gamma} = g = -u^{\text{inc}}|_{\Gamma} \text{ ou } \partial_{\mathbf{n}} u^+|_{\Gamma} = g = -\partial_{\mathbf{n}} u^{\text{inc}}|_{\Gamma}, \text{ sur } \Gamma, \\ \text{Condition de radiation de Sommerfeld à l'infini} \\ \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow +\infty} |\mathbf{x}| \left(\nabla u^+ \cdot \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} - i k u^+ \right) = 0, \end{array} \right. \quad (1)$$

avec une onde incidente plane $u^{\text{inc}}(\mathbf{x}) = e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$, $\|\mathbf{k}\| = k$.

Champ lointain : SER (Surface Equivalente Radar).

1.3 – Résolution numérique et ses difficultés

Première difficulté : Domaine de calcul non borné.

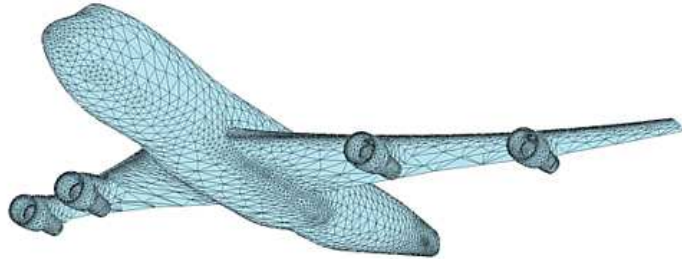
- **Méthodes volumiques** (différences finies, éléments ou volumes finis) : Troncature du domaine Ω^+ par une condition aux limites absorbante + Maillage tridimensionnel du domaine tronqué.
- **Méthodes intégrales** : Reformuler de façon équivalente le problème aux limites initial sous la forme d'une équation intégrale posée sur la frontière *finie* de l'obstacle, dépendant de G la fonction de Green

$$G(\mathbf{x}) = \frac{e^{ik|\mathbf{x}|}}{4\pi|\mathbf{x}|}.$$

Avantage : Réduire de un la dimension du problème.

Deuxième difficulté : On souhaite résoudre des **cas dits “haute-fréquence”**, définis par une longueur d’onde λ très petite ($k \rightarrow +\infty$) devant la taille caractéristique de l’obstacle. D’où **augmentation considérable de la taille des calculs**.

Exemple :



- ➡ $\lambda = 0.15\text{m}$ ($k \approx 7\pi$)
- ➡ taille caractéristique 20m, soit environ 133λ
- ➡ 55 millions de degrés de liberté

Méthode des équations intégrales

2 – Méthode des équations intégrales

2.1 – Représentation intégrale d'Helmholtz

Recherche du champ extérieur u^+ sous la forme suivante

$$u^+ = -\mathcal{L}\partial_{\mathbf{n}}\mathbf{u}^+|_{\Gamma} - \mathcal{M}\mathbf{u}^+|_{\Gamma} \text{ dans } \Omega^+$$

→ $(\mathbf{u}^+|_{\Gamma}, \partial_{\mathbf{n}}\mathbf{u}^+|_{\Gamma})$ nouvelles inconnues du problème

→ le potentiel de simple couche \mathcal{L}

$$\mathcal{L}p(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})p(\mathbf{y})d\Gamma(\mathbf{y}), \mathbf{x} \notin \Gamma,$$

→ le potentiel de double couche \mathcal{M}

$$\mathcal{M}\phi(\mathbf{x}) = - \int_{\Gamma} \partial_{\mathbf{n}(\mathbf{y})}G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\phi(\mathbf{y})d\Gamma(\mathbf{y}), \mathbf{x} \notin \Gamma.$$

2.2 – Comment obtenir une équation intégrale ?

On obtient une équation intégrale posée sur Γ en considérant la trace ou la trace normale de la représentation de Helmholtz. Elle sera alors définie par la trace et/ou trace normale des potentiels de simple et de double couche.

Théorème 1 *Les quatre opérateurs intégraux élémentaires sur Γ sont exprimés par*

$$\begin{aligned} Lp(\mathbf{x}) &= \int_{\Gamma} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})p(\mathbf{y})d\Gamma(\mathbf{y}), \mathbf{x} \in \Gamma, \\ M\phi(\mathbf{x}) &= - \int_{\Gamma} \partial_{\mathbf{n}(\mathbf{y})}G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\phi(\mathbf{y})d\Gamma(\mathbf{y}), \mathbf{x} \in \Gamma, \\ Np(\mathbf{x}) &= \partial_{\mathbf{n}(\mathbf{x})} \int_{\Gamma} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})p(\mathbf{y})d\Gamma(\mathbf{y}), \mathbf{x} \in \Gamma, \\ D\phi(\mathbf{x}) &= -\partial_{\mathbf{n}(\mathbf{x})} \int_{\Gamma} \partial_{\mathbf{n}(\mathbf{y})}G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\phi(\mathbf{y})d\Gamma(\mathbf{y}), \mathbf{x} \in \Gamma. \end{aligned} \tag{2}$$

- Surfaces fermées : *une infinité d'équations intégrales* (Brakhage-Werner 1965 , CFIE 1978)
- Surfaces ouvertes : *une seule équation intégrale* (Electric Field Integral Equation)
- Equations intégrales directes (inconnue physique) ou indirectes (densité fictive)

2.3 – Difficultés numériques

Considérons l'équation intégrale

$$\mathcal{A}p = g, \quad \text{sur } \Gamma.$$

Première difficulté : Caractère non-local de l'opérateur $\mathcal{A} \Rightarrow$ matrice $[A_h]$ de taille n_h issue de la discrétisation est complexe, pleine et non symétrique.

Conséquence : Impossibilité de traiter des problèmes haute-fréquence par des méthodes directes de coût $\mathcal{O}(n_h^3)$.

Alternative : Appliquer un solveur itératif (GMRES)

Le coût de résolution du système linéaire est de l'ordre de $\mathcal{O}(N^{\text{iter}} n_h^2)$, n_h la taille du système.

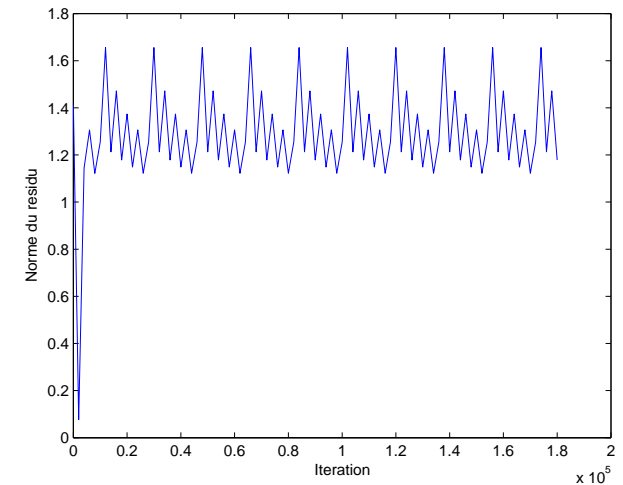
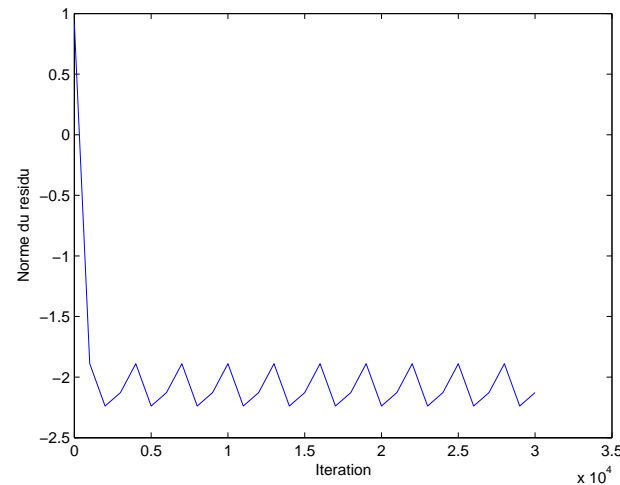
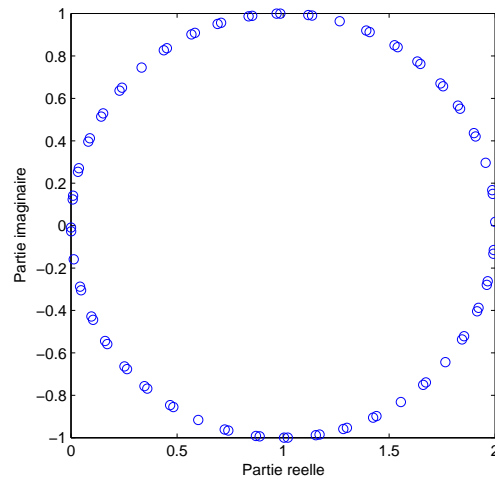
- ➡ Paramètre N^{iter} = nombre d'itérations nécessaire à la convergence de l'algorithme pour une tolérance ϵ fixée sur le résidu
- ➡ Coût $\mathcal{O}(n_h^2)$ = coût de l'évaluation d'un produit matrice-vecteur intervenant dans l'algorithme
 - ➡ Réduit en $\mathcal{O}(n_h \log n_h)$ grâce à la Méthode Multipôle Rapide (Fast Multipole Method ou FMM, Greengard, Rokhlin 1990)

Objectif : Agir sur le nombre d'itérations N^{iter}

Deux propriétés essentielles pour une convergence rapide

- ➡ un conditionnement idéalement proche de 1
- ➡ une bonne répartition des valeurs propres dans le plan complexe

Seconde difficulté : $[A_h]$ non définie positive \Rightarrow Problèmes de convergence des solveurs itératifs.



- ➡ Construire directement des formulations intégrales bien conditionnées.
- ➡ Construire un préconditionneur $[P]$ tel que $[P] \approx [A_h]^{-1}$ et résoudre

$$[P][A_h]x_h = [P]b_h \text{ (à gauche)}$$

ou

$$[A_h][P]y_h = b_h \text{ avec } [P]y_h = x_h \text{ (à droite).}$$

Surfaces fermées-Equations intégrales combinées généralisées

3 – Equations intégrales combinées généralisées

3.1 – Formulation intégrale de Brakhage-Werner

- Pour obtenir une EI bien posée, choix de représentation intégrale du champ extérieur (Brakhage-Werner 1965, Burton-Miller 1971)

$$u^+ = -\mathcal{L}\varphi - \eta\mathcal{M}\varphi \text{ dans } \Omega^+,$$

avec η un paramètre de couplage complexe.

- La densité fictive $\varphi \in \mathcal{C}(\Gamma)$ est solution de l'équation intégrale

$$\mathcal{B}\varphi = \left(\frac{I}{2} - N - \eta D\right)\varphi = -\partial_{\mathbf{n}}u^{\text{inc}}|_{\Gamma}, \text{ dans } H^{-1/2}(\Gamma).$$

- Equation intégrale de Fredholm de première espèce : Trouver φ telle que

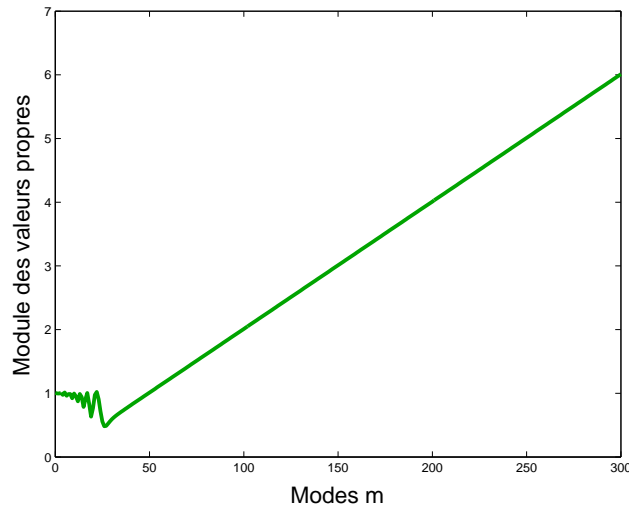
$$\forall x \in \Gamma, \int_{\Gamma} K(x, y)\varphi(y)dy = f(x).$$

- Existence et unicité de la solution pour tout nombre d'onde $k > 0$ dès que

$$\Im(\eta) < 0$$

- Etudes numériques (Kress 1985 et Amini 1989) : paramètre de couplage "optimal"

$$\eta_{\text{opt}} = -i/k$$



- Calcul exact des valeurs propres dans le cas de la sphère de rayon R
- $R = 1$, $kR = 25$, $n_\lambda = \lambda/h = 24$
 h pas du maillage.
- Dispersion des valeurs propres dans la partie "elliptique"

➤ Conditionnement : $K([B_h]) \approx \frac{n_\lambda}{2.4(1 + 5(kR)^{1/3}/6)}$

Question : Comment "effacer" ces dépendances en n_λ et kR ?

Solution : Régularisation de l'opérateur D (d'ordre 1)

3.2 – Généralisation des équations de type BW

Principe : Soit l'opérateur Neumann-Dirichlet (ND) exact

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^{\text{ex}} : H^{-1/2}(\Gamma) &\rightarrow H^{1/2}(\Gamma) \\ \partial_{\mathbf{n}} u^+|_{\Gamma} &\mapsto u^+|_{\Gamma} = \mathbf{V}^{\text{ex}} \partial_{\mathbf{n}} u^+|_{\Gamma} \end{aligned} \quad (3)$$

➡ Représentation intégrale du champ extérieur

$$u^+ = -\mathcal{L} \partial_{\mathbf{n}} \mathbf{u}^+|_{\Gamma} - \mathcal{M} \mathbf{u}^+|_{\Gamma} \text{ dans } \Omega^+$$

➡ soit encore

$$u^+ = -\mathcal{L} \partial_{\mathbf{n}} \mathbf{u}^+|_{\Gamma} - \mathcal{M} \mathbf{V}^{\text{ex}} \partial_{\mathbf{n}} \mathbf{u}^+|_{\Gamma} \text{ dans } \Omega^+$$

- ➡ Expression de la trace normale extérieure

$$\partial_{\mathbf{n}} u^+|_{\Gamma} = \left(\frac{I}{2} - N\right) \partial_{\mathbf{n}} u^+|_{\Gamma} - D\mathbf{V}^{\text{ex}} \partial_{\mathbf{n}} u^+|_{\Gamma}$$

soit

$$\boxed{\frac{I}{2} - N - D\mathbf{V}^{\text{ex}} = I} \quad (4)$$

- ➡ Cependant, impossibilité d'expliciter \mathbf{V}^{ex} pour une surface arbitraire...

...mais on peut considérer la représentation du champ extérieur

$$u^+ = -\mathcal{L}\varphi - \mathcal{M}\tilde{\mathbf{V}}\varphi \text{ dans } \Omega^+,$$

avec

➡ $\tilde{\mathbf{V}}$ approximation locale de l'opérateur ND exact \mathbf{V}^{ex}

➡ la densité non physique φ solution de

$$\left(\frac{I}{2} - N - D\tilde{\mathbf{V}} \right) \varphi = -\partial_{\mathbf{n}} u^{\text{inc}}|_{\Gamma} \text{ dans } H^{-1/2}(\Gamma) \quad (5)$$

➡ Le choix de l'approximation $\tilde{\mathbf{V}} = 1/(ik)$ d'ordre 1/2 conduit à la formulation BW usuelle avec le paramètre de couplage de Kress $\eta_{\text{opt}} = -i/k$.

Donc (5) définit une généralisation de la formulation BW usuelle.

Conditions de radiation sur le bord (*Engquist Majda (1979) , Antoine (1997)*)

$$\tilde{V} = \frac{1}{ik} \left(1 + \frac{\Delta_{\Gamma}}{k_{\epsilon}^2}\right)^{-1/2} \quad \text{tel que } \psi = \tilde{V} \varphi$$

avec

- ➡ (ψ, φ) approximation des données de Cauchy $(u^+|_{\Gamma}, \partial_n u^+|_{\Gamma})$
- ➡ Δ_{Γ} l'opérateur de Laplace-Beltrami sur Γ .
- ➡ $k_{\epsilon} = k + i\epsilon$

Traitement de l'opérateur racine carrée : Approximation rationnelle (Padé complexe, *Milinazzo et al. (1997)*)

$$\left(1 + \frac{\Delta_{\Gamma}}{k_{\epsilon}^2}\right) \psi \approx \frac{1}{ik} \sqrt{1 + \frac{\Delta_{\Gamma}}{k_{\epsilon}^2}} \varphi \quad \text{sur } \Gamma.$$

3.3 – Résultat d'existence et d'unicité

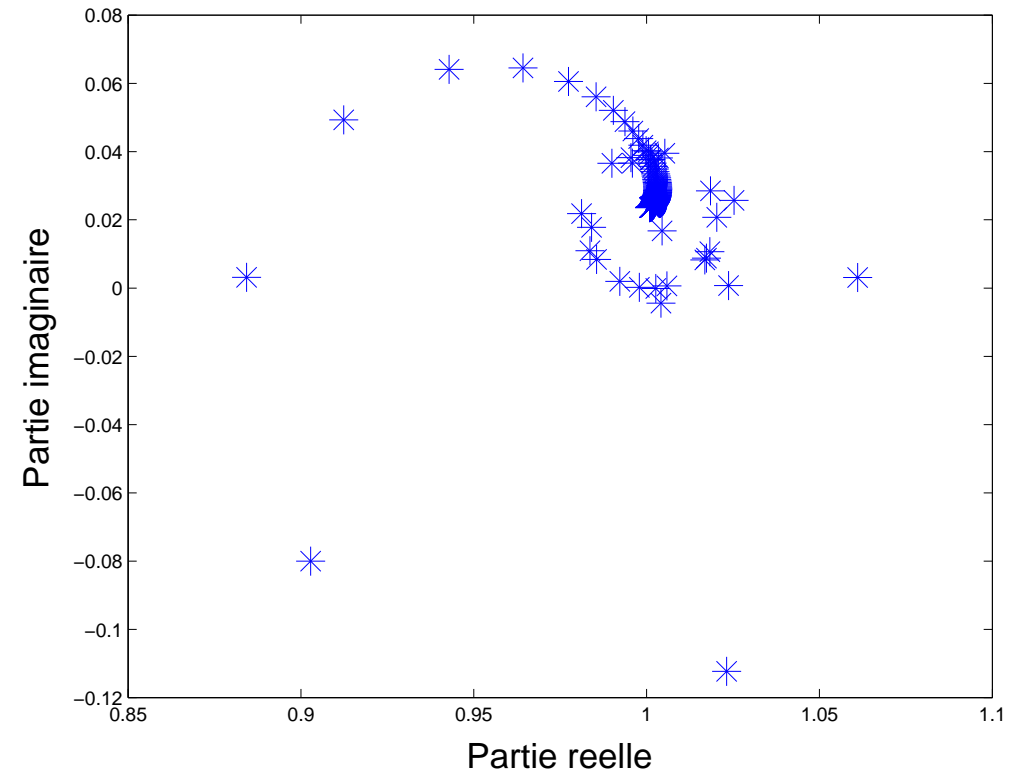
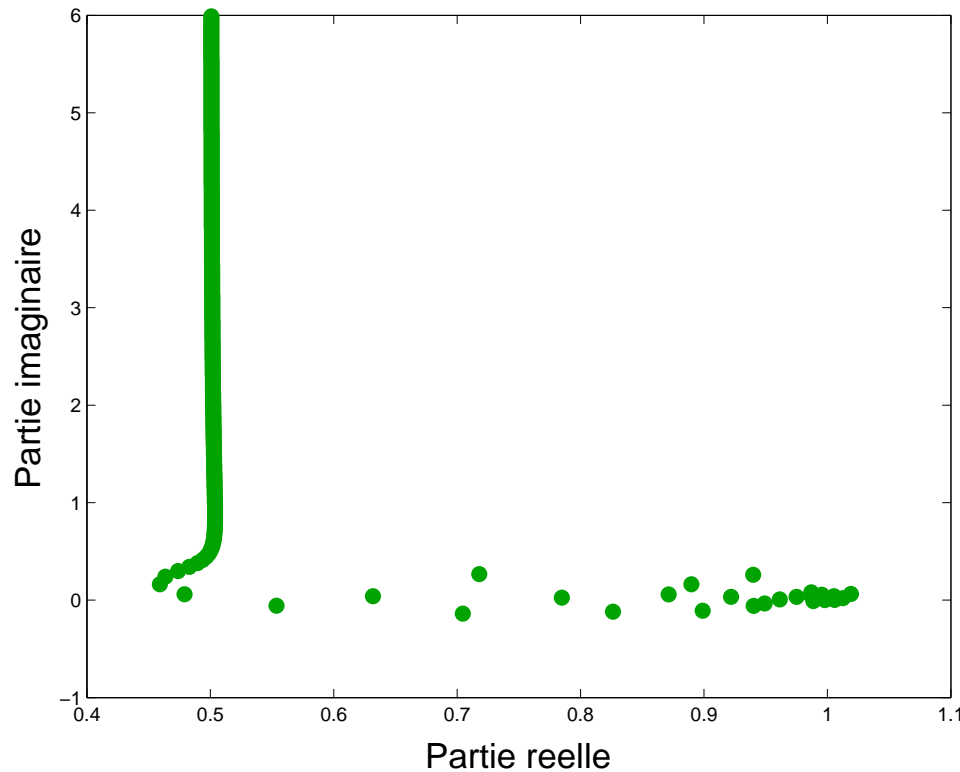
Proposition 1 *L'équation intégrale de Brakhage-Werner généralisée*

$$\mathcal{B}\varphi = \left(\frac{I}{2} - N - D\tilde{V}\right)\varphi = -\partial_{\mathbf{n}}u^{\text{inc}}|_{\Gamma}, \text{ dans } H^{-1/2}(\Gamma)$$

admet une **unique solution** pour tout nombre d'onde $k > 0$ et tout paramètre de damping $\varepsilon > 0$.

- Equation intégrale de type **Fredholm de seconde espèce** de la forme $aI + \mathcal{K}$ avec $a \neq 0$ et \mathcal{K} un opérateur compact

Données : $k = 25$, $n_\lambda = 24$, $\varepsilon = \varepsilon_{\text{opt}} = 0.4k^{1/3}R^{-2/3} = 1.1996$

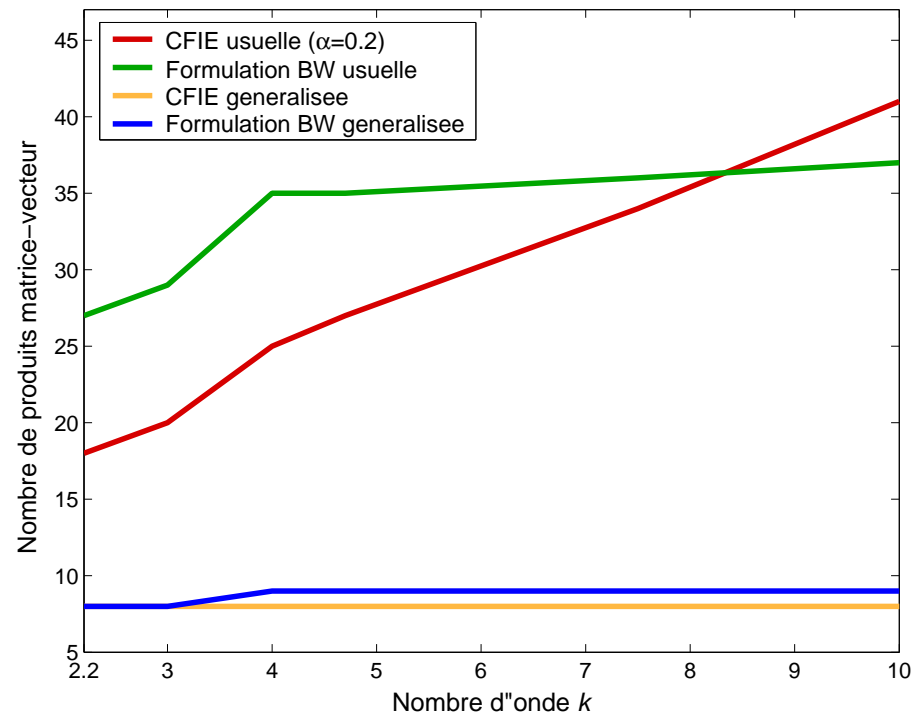
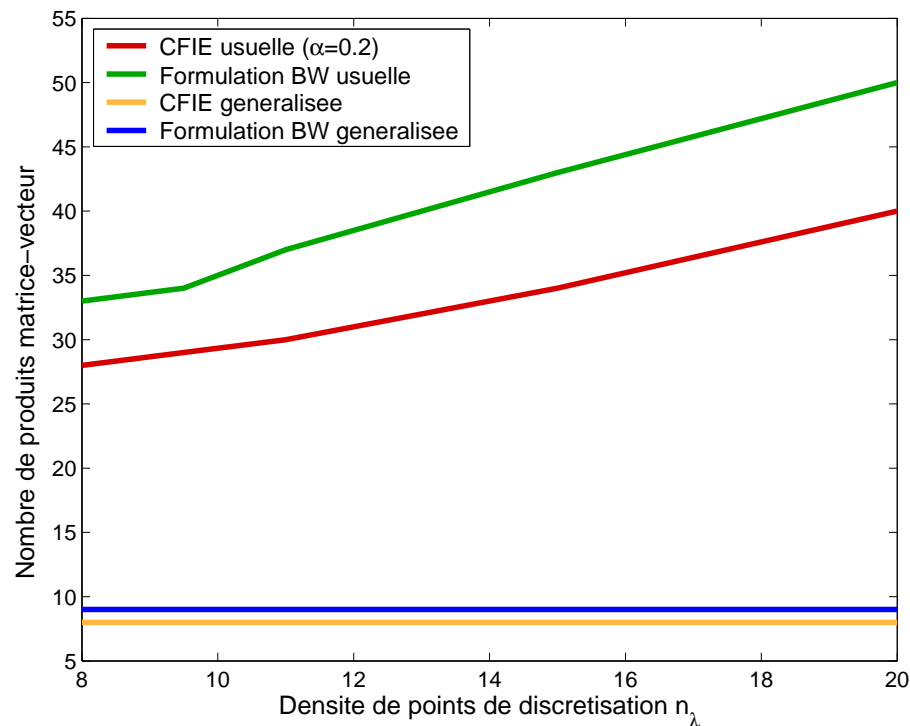


- ➡ BW usuelle : Dispersion du spectre dans la partie elliptique
- ➡ BW généralisée : Regroupement du spectre autour du point $(1, 0)$ pour tous les types de rayons

Obstacle : Cube de côté de longueur 2 centré à l'origine

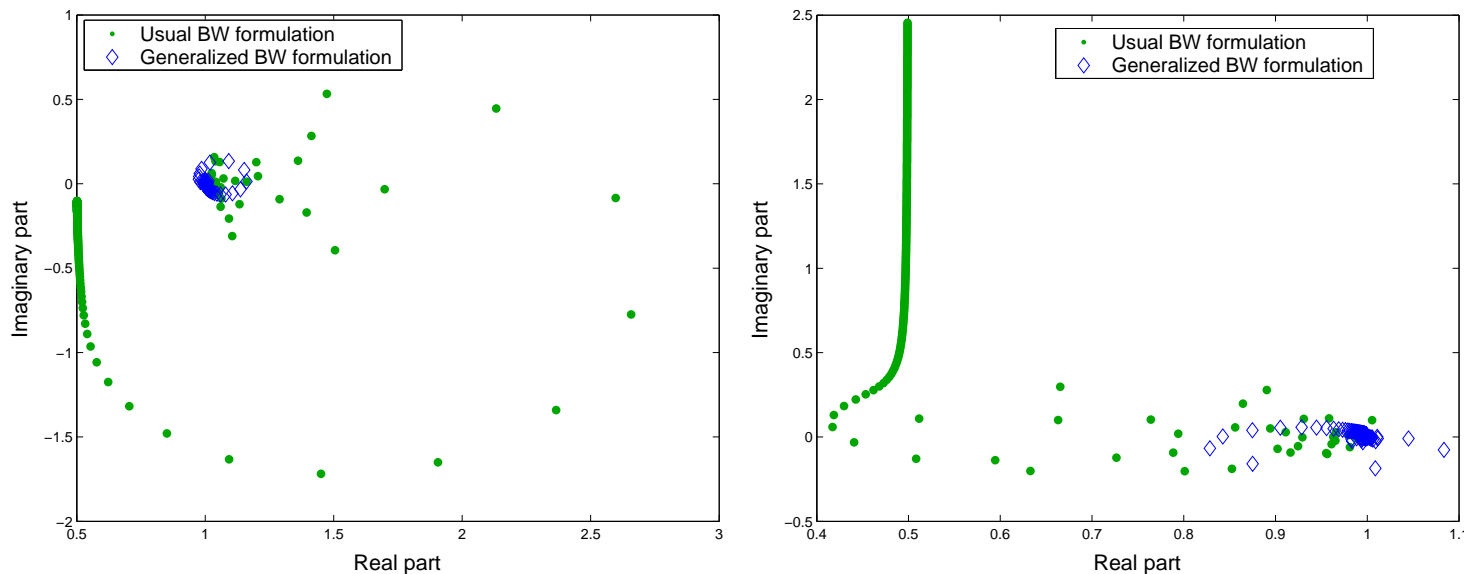
Figure 1 : $k = 5$ et incidence de $(30, 0)$ degrés.

Figure 2 : $n_\lambda = 10$ et incidence de $(30, 0)$ degrés.



3.4 – Maxwell

- ➡ Obtention d'équations intégrales de type Fredholm de seconde espèce avec de bonnes propriétés spectrales.
- ➡ $k = 50$, $n_\lambda = 10$, base de vecteurs propres $\{\nabla Y_n^m, \nabla Y_n^m \times \mathbf{n}\}$



Références : Levadoux et al. (2005), Pernet (2007), Bruno, Turc et al. (2009) . . .

3.5 – Codes disponibles

Helmholtz

2D, MATLAB

- ➡ Code EI (bibliothèque ie2m)

3D, Fortran 90

- ➡ Maillages (sphères, ellipsoïdes, cubes)
- ➡ Code EI

Maxwell

3D, MATLAB

- ➡ Etude spectrale dans le cas sphérique

Surfaces ouvertes-Préconditionneurs analytiques

4 – Préconditionneurs analytiques-Surfaces ouvertes

4.1 – Equation Intégrale en Champ Electrique

Une seule équation intégrale disponible

- ➡ Problème de Dirichlet (simple couche)

$$Lp = -u^{\text{inc}}|_{\Gamma}, \text{ sur } \Gamma.$$

- ➡ Problème de Neumann (double couche)

$$Dq = -\partial_{\mathbf{n}}u^{\text{inc}}|_{\Gamma}, \text{ sur } \Gamma.$$

4.2 – Approche intégrale : Calderòn

➡ Relations de Calderòn

$$DL = \frac{I}{4} - M^2 \quad \text{et} \quad LD = \frac{I}{4} - N^2$$

avec M la trace normale du simple couche et $N = M^t$ la trace du double couche.

➡ M et N sont des opérateurs compacts, donc **les valeurs propres des opérateurs DL et LD sont regroupées autour de la valeur $\frac{1}{4}$.**

Idée : D (resp. L) est un "bon" préconditionneur pour L (resp. D).

Références : Steinbach et Wendland (1998), Christiansen et Nédélec (2001), Michielssen (2007), Bruno al (2007), Antoine et Boubendir (2008) . . .

4.3 – Approche pseudodifférentielle

➡ Soit un opérateur pseudodifférentiel A de symbole a

$$A(x, \partial_x)u(x) = \mathcal{F}^{-1}(a(x, \xi)\mathcal{F}(u)(\xi)).$$

Notations : $a(x, \xi) = \sigma(A)$, $A(x, \partial_x) = Op(a(x, \xi))$.

➡ Formule de composition : "Le symbole de l'opérateur BA est donné par $\sigma(BA) = \sigma(B)\sigma(A)$ ".

Idée : Si l'on connaît le symbole a d'un opérateur pseudodifférentiel A , alors l'opérateur pseudodifférentiel $Op(\sigma(\frac{1}{a}))$ est une "bonne" approximation de A^{-1}

$$Op(\sigma(\frac{1}{a}))A \approx I.$$

➡ Nous avons

$$-2D\mathbf{V}_{\text{ex}} = I, \text{ sur } \Gamma,$$

avec \mathbf{V}_{ex} l'opérateur pseudodifférentiel Neumann-to-Dirichlet exact.

➡ Symbôle de l'opérateur \mathbf{V}_{ex}

$$\sigma(\mathbf{V}_{\text{ex}}) = \frac{1}{ik} \left(1 - \frac{|\xi|^2}{k^2}\right)^{-1/2}.$$

➡ On considère alors comme préconditionneur analytique pour l'EFIE,

$$\mathbf{V}_{\varepsilon} = \frac{1}{ik} \left(1 + \frac{\Delta_{\Gamma}}{k_{\varepsilon}^2}\right)^{-1/2}$$

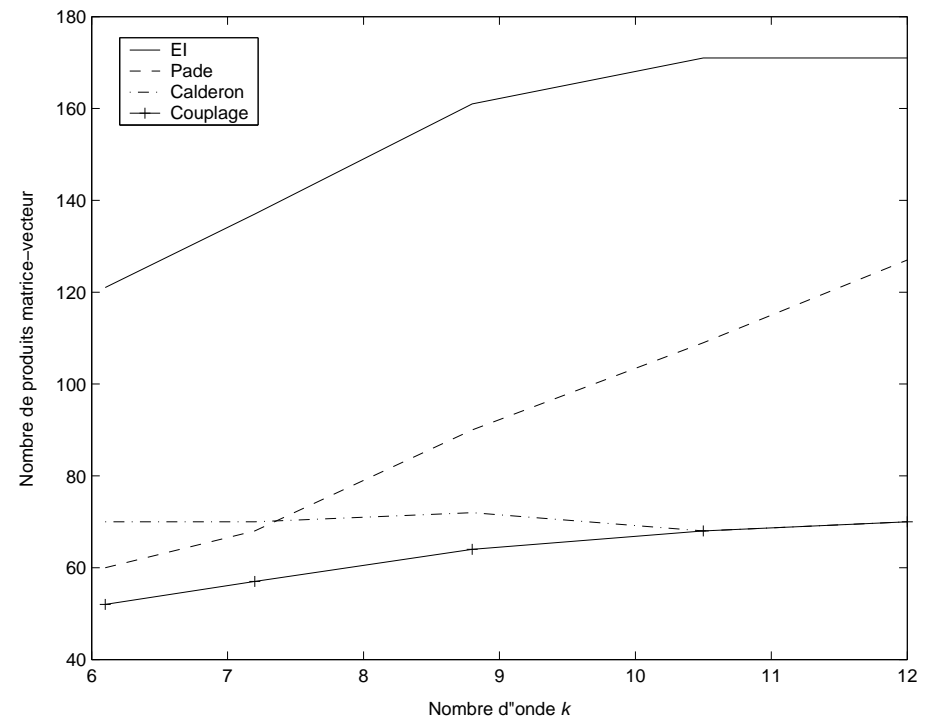
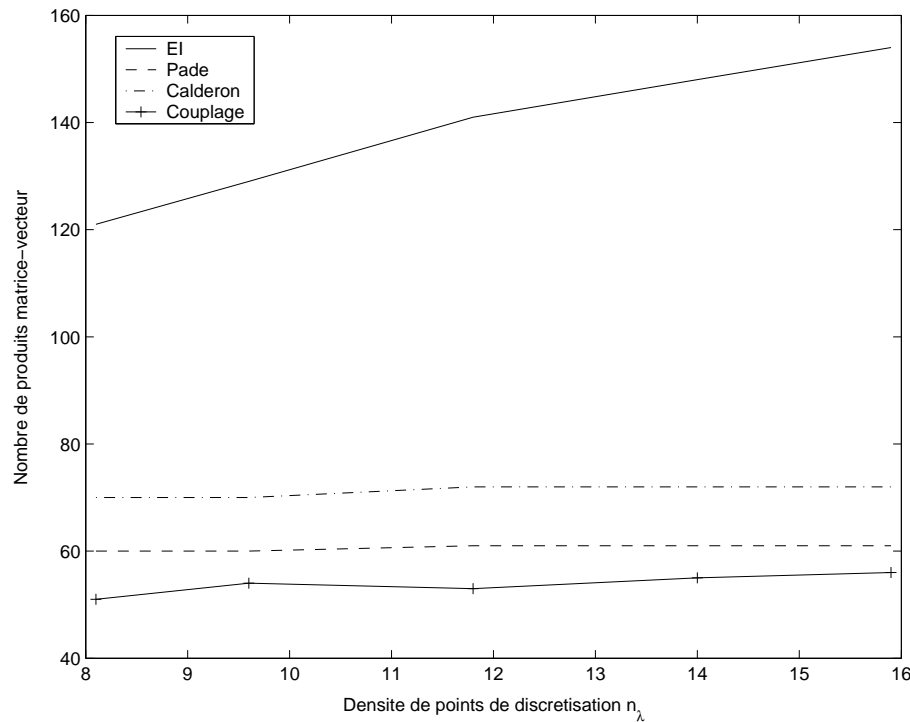
Avantage : Préconditionneur creux.

➡ **Obstacle : Plaques parallèles** $\Gamma_1 = [-1, 1] \times [-1, 1] \times 0$ et

$$\Gamma_2 = [-1, 1] \times [-1, 1] \times 0.2$$

➡ Figure 1 : $k = 6$ et incidence de $(45, 0)$ degrés.

➡ Figure 2 : $n_\lambda = 8$ et incidence de $(45, 0)$ degrés.



4.4 – Codes disponibles

2D, Matlab

- Segment et segments parallèles : Préconditionneurs SPAI, Calderòn, Padé, Padé "couplé"

3D, Fortran 90

- Plaque et plaques parallèles : Préconditionneurs Calderòn, Padé, Padé "couplé"