

# Éléments finis en volume, solveurs itératifs et préconditionneurs

**Xavier Antoine**

Institut Elie Cartan de Nancy (IECN), Nancy-Université  
ANR MicroWave, INRIA-CORIDA Team

**Journées ANR, Décembre 2009**

- 1 Introduction générale
- 2 Rappel du problème de diffraction et son approximation

1 Introduction générale

2 Rappel du problème de diffraction et son approximation

## But ici

- Plus vous présenter la stratégie générale plutôt que des résultats: prospectif
- Essayer certaines idées de ce qu'on a fait pour les équations intégrales aux formulations en volume
- Réfléchir à une solution hybride algébrique/analytique

1 Introduction générale

2 Rappel du problème de diffraction et son approximation

Diffraction:

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)u = 0, \text{ dans } \Omega, \\ \partial_{\mathbf{n}}u = g = -\partial_{\mathbf{n}}u^{inc}, \text{ sur } \Gamma, \\ \text{SRC}(u) = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

## Approximation avec une CLA

$$\begin{cases} (\Delta + k^2)u = 0, \text{ dans } \Omega_b, \\ \partial_{\mathbf{n}}u = g = -\partial_{\mathbf{n}}u^{inc}, \text{ sur } \Gamma, \\ \partial_{\mathbf{n}}u + i\Lambda u = 0 \text{ sur } \Sigma. \end{cases} \quad (2.2)$$

## Approximation avec une PML

$$\begin{cases} \partial_{x_1} \left( \frac{S_{x_2}}{S_{x_1}} \partial_{x_1} u \right) + \partial_{x_2} \left( \frac{S_{x_1}}{S_{x_2}} \partial_{x_2} u \right) + k^2 u = 0, \\ \text{dans } \Omega_{PML} = (\Omega \cup \text{couche}), \\ \partial_{\mathbf{n}}u = g = -\partial_{\mathbf{n}}u^{inc}, \text{ sur } \Gamma. \end{cases} \quad (2.3)$$

## Formulation variationnelle CLA (Version similaire pour les PML)

Trouver  $u$  dans le domaine borné telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour toute fct-test } v, a(u, v) = L(v), \\ a(u, v) = \int_{\Omega_b} (\nabla u \cdot \nabla v - k^2 uv) d\Omega_b + \int_{\Sigma} \Lambda uv d\Sigma, \\ L(v) = \int_{\Gamma} g v d\Gamma \end{array} \right. \quad (2.4)$$



## Formulation variationnelle CLA (Version similaire pour les PML)

Trouver  $\mathbf{u}_h \in V_h$  approximation éléments finis par exemple telle que

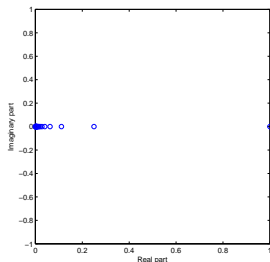
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour toute vecteur-test } \mathbf{v}_h \in V_h, a_h(u_h, v_h) = L_h(v_h), \\ a_h(u_h, v_h) = \int_{\Omega_{b,h}} (\nabla_h u_h \cdot \nabla_h v_h - k^2 u_h v_h) d\Omega_{b,h} \\ \quad + \int_{\Sigma_h} \Lambda_h u_h v_h d\Sigma_h, \\ L_h(v_h) = \int_{\Gamma_h} g_h v_h d\Gamma_h \end{array} \right. \quad (2.5)$$

La dimension de  $V_h$  est égale au nombre de degrés de liberté de la méthode = noeuds du maillage en éléments finis  $\mathbb{P}_1$ .

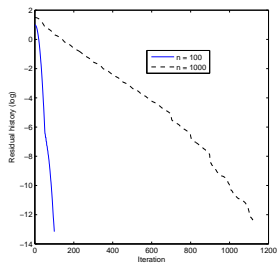
## Formulation variationnelle CLA (Version similaire pour les PML)

- Comme on est en haute fréquence, on doit mailler ( $h$ ) en fonction de la longueur d'onde  $\lambda = 2\pi/k$ ,  $n_h =$  densité de points par longueur d'onde,  $h = \lambda/n_h$ . Donc la taille devient très grande. Effet de pollution numérique empirent la situation (cf. le point "éléments finis HF").
- On a un système linéaire à résoudre:  $\mathbb{A}_h \mathbf{u}_h = \mathbf{b}_h$
- La matrice est complexe, creuse et non défini positive: solution par une méthode itérative: peu diverger: exemples

# Exemple 1



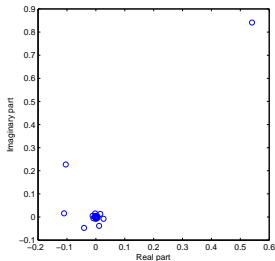
(a)  $A_1$ : Eigenvalues distribution ( $n = 100$ )



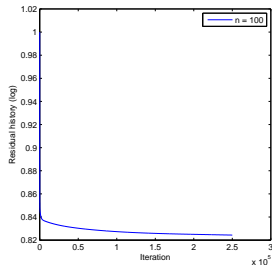
(b)  $A_1$ : Convergence history

Figure:  $A_1 = \text{diag}(1/\ell^2)_{1 \leq \ell \leq n}$ .

## Exemple 2



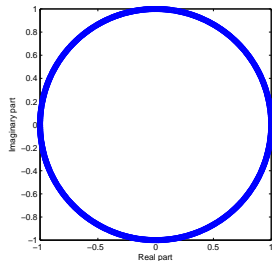
(a)  $A_2$ : Eigenvalues distribution ( $n = 100$ )



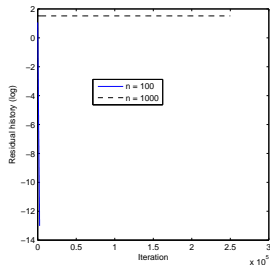
(b)  $A_2$ : Convergence history

Figure:  $A_2 = \text{diag}(e^{i\ell} / \ell^2)_{1 \leq \ell \leq n}$ .

## Exemple 3



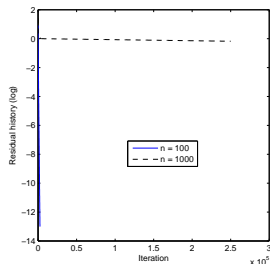
(a)  $A_3$ : Eigenvalues distribution ( $n = 1000$ )



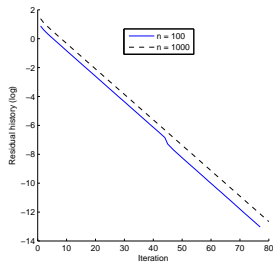
(b)  $A_3$ : Convergence history

Figure:  $A_3 = \text{diag}(e^{i\ell})_{1 \leq \ell \leq n}$ .

# Exemples 4 et 5



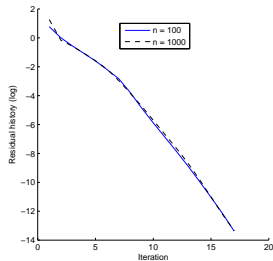
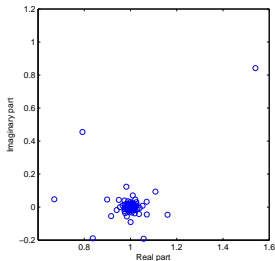
(a)  $A_4$ : Convergence history



(b)  $A_5$ : Convergence history

Figure:  $A_4 = \text{diag}(1 + e^{i\ell})_{1 \leq \ell \leq n}$ ,  $A_5 = \text{diag}(1.5 + e^{i\ell})_{1 \leq \ell \leq n}$ .

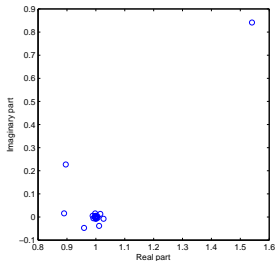
# Exemple 6



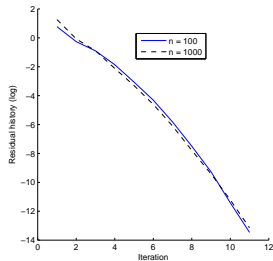
(a)  $A_6$ : Eigenvalues distribution ( $n = 100$ ) (b)  $A_6$ : Convergence history ( $n = 100$ )

Figure:  $A_6 = \text{diag}(1 + e^{i\ell}/\ell)_{1 \leq \ell \leq n}$ .

# Exemple 7



(a)  $A_7$ : Eigenvalues distribution ( $n = 100$ )

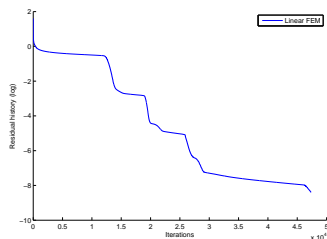


(b)  $A_7$ : Convergence history

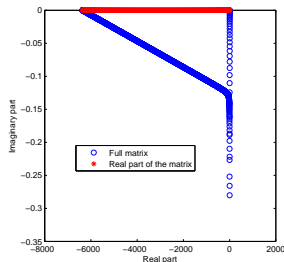
Figure:  $A_7 = \text{diag}(1 + e^{i\ell/\ell^2})_{1 \leq \ell \leq n}$ .



Si on revient à Hemholtz: exemple en 1D:  $]0; 1[$ ,  $k = 100$ ,  
 $n_h = 100$



(a)  $\mathbb{A}_h$ : Convergence history



(b)  $\mathbb{A}_h$ : Eigenvalues distribution

Figure: Matrix  $\mathbb{A}_h = (\mathbb{S}_h - k^2 \mathbb{M}_h - ik \mathbb{B}_h)$ .

## Il y a pas mal de papier sur des preconditionneurs algébriques

- Incomplete LU factorization:  $P \approx LU$  ou on enlève des coefficients dans la factorisation si par exemple ils sont "trop petits", ou si on en veut pas de plus de tant par (ligne, colonne)
- SParse Approximate Inverse: minimiser une norme  $\|PA - I\|$  ou  $\|AP - I\|$  pour trouver  $P$
- Il existe d'autres extensions de type multi-niveaux ainsi que d'autres types de preconditionneurs
- On retrouve aussi ces techniques en équations intégrales
- Marche plutôt pas mal mais les algorithmes divergent quand même assez vite dès qu'on monte en fréquence  $k$

## Il y a pas mal de papier sur des préconditionneurs algébriques

- En fait, aucun papier n'explique profondément les problèmes: par exemple: dépendance par rapport à la géométrie, au type de CLA/PML, paramètres physiques (milieux hétérogènes), discrétisation → c'est un travail à faire
- L'idée serait de passer au calcul pseudo pour nous aider à proposer des alternative de type analytique, quitte à coupler après avec des idées algébriques (préconditionneurs hybrides)

*LU* analytique (idée un peu initiée par F. Nataf et M. Gander)

- En fait, on pourrait partir sur une factorisation pour les CLA

$$A = (\partial_{\mathbf{n}} + i\Lambda^-)(\partial_{\mathbf{n}} + i\Lambda^+) = LU$$

et quelque chose de similaire pour les PML (il n'y a plus le problème vraiment de la frontière artificielle, peut être plus commode car on sait faire des factorisations avec opérateurs à coefficients variables)

- quand je dis " $\partial_{\mathbf{n}}$ ", ce n'est pas clair: on pourrait penser à faire les choses localement sur le triangle éléments finis, globalement sur le domaine de calcul...
- Remarquez qu'il faut a priori trouver un opérateur pour les problèmes aux limites: donc il faut peut être investiguer les théories pseudos pour les problèmes aux limites (je crois qu'il y a des trucs de Boutet de Monvel?)

Méthode de "shifted Laplace operators" (initée par Bayliss, Goldberg, Turkel et améliorée par plusieurs auteurs récemment)

- L'idée de départ est de préconditionner par  $\Delta^{-1}$  ce qui donne

$$\Delta^{-1}A = \Delta^{-1}(\Delta + k^2) = 1 + k^2\Delta^{-1}$$

- En terme de symbole (valeur propre dans Fourier par diagonalisation) on voit qu'on obtient  $1 - k^2/||\xi||^2$  comme valeur propre. On on a une sorte de cluster autour de 1 pour l'opérateur Laplacien (attention, ni la condition aux limites ni celle artificielle ne sont incluses à ce moment). La CLA ou PML nous emmène dans le plan complexe pour les valeurs propres. Ce truc marche pas trop mal en basse/moyenne fréquence car  $k$  n'est pas trop grand: ça ressemble à du Laplace: déconne complet en HF

### Méthode de "Laplace shifted operators" (idée initiée Bayliss, Goldberg, Turkel et améliorée par plusieurs auteurs récemment)

- Si on fait le parallèle avec ce dont a parlé Marion, on voit qu'on corrige les hautes fréquences spatiales  $\|\xi\|$  grand, soit ce qui dépend de la discrétisation
- $\Delta^{-1}$  n'est pas résolu exactement mais de façon approchée avec des solveurs itératifs. Comme c'est un Laplacien, un préconditionneur algébrique marche pas trop mal
- Une idée qui résout partiellement le problème est un shift:  $P = (\Delta + \alpha k^2)^{-1}$ , où  $\alpha$  est à fixer. En pratique, les gens ont dit que  $\alpha = 1 + (0.5, 1)i$  est un bon choix

## Pourquoi en fait ça marche: explication en termes de pseudos

- Si on fait le shift, le symbole principal de  $(\Delta + \alpha k^2)^{-1}(\Delta + \alpha k^2)$ , qui correspond en fait à une approximation des valeurs propres, est

$$\xi \in \mathbb{R}^2 \rightarrow -\frac{(1 - \|\xi\|^2/k^2)}{(\alpha - \|\xi\|^2/k^2)}$$

- C'est en fait la transformation homographique qui à  $z = -\|\xi/k\| \in \mathbb{R}^-$  associe

$$\frac{(1 + z)}{(\alpha + z)}$$

et qui transforme la droite négative en portion de cercle qui se trouve du bon côté du plan complexe (selon  $\alpha$ ) (j'ai fait tous les calculs analytiques mais je ne les retrouve pas encore)

# Une deuxième piste: et un deuxième petit dessin

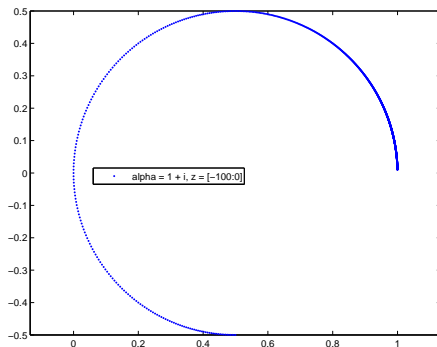


Figure: Effet de l'homographie.



# Une deuxième piste: et un deuxième petit dessin

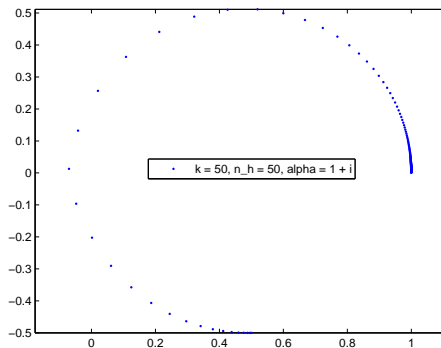


Figure: Un exemple en 1d.

## Pour commencer

- C'est déjà justifier tout cela par le pseudo, étendre à des choses plus générales, coefficients variables
- Passer à des dimensions supérieures
- On peut penser à faire des choses du type racine carrée:  
 $PA = \sqrt{\Delta + k^2}^{-1} A \sqrt{\Delta + k^2}^{-1}$  pour agir sur la partie propagative avec Padé complexe (bon pour les solveurs car on ajoute de la positivité). On peut coupler cela à certaines techniques appelées préconditionneurs rationnels (Saad)
- Passer à Maxwell (voire l'élasticité), du non linéaire (Schrödinger)
- Préconditionner des formulations couplées Equations Intégrales pour le problème extérieur + préconditionneur de ces types pour Helmholtz intérieur inhomogène
- Collaborations: Y. Saad, E. Turkel... pour faire avancer ces techniques + des couplages avec des choses plus algébriques